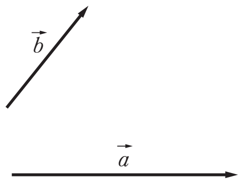
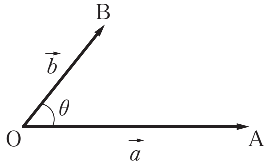
# 第40講　平面ベクトル(2)

**【基礎確認事項】**

## [1]　ベクトルの内積

□平面上に $\vec{0}$ ではない2つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ が与えられたとき，この平面上に点Oをとり，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ となるように点A，Bをとる．このとき，∠AOBの大きさ $\theta$ を2つのベクトルの**なす角**という．ただし，$0\leqq\theta\leqq180^\circ$ とする．




□このとき，ベクトルの**内積** $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を次のように定義する．

**ベクトルの内積**

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を $\theta$ とすると　$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$

とくに $\vec{a}=0$　または　$\vec{b}=0$ のときは　$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$　である．

ベクトルの内積はスカラーになる．

⇒　C&U 1

## [2]　内積と成分表示

□成分表示された2つのベクトル　$\vec{a}=(a_1,\ b_1)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ について，内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を成分を用いて表してみよう．

Oを始点として　$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$　となるようにA，Bをとり，$\angle AOB=\theta$　とする．

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=OA\cdot OB\cdot\cos\theta$　……①

また，△OABにおいて余弦定理より

$AB^2=OA^2+OB^2-2\cdot OA\cdot OB\cdot\cos\theta$　より

$$OA\cdot OB\cdot\cos\theta=\frac{OA^2+OB^2-AB^2}{2}$$

$$=\frac{(a_1{}^2+a_2{}^2)+(b_1{}^2+b_2{}^2)-\{(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2\}}{2}$$

$=a_1b_1+a_2b_2$　……②

①，②より次のことがいえる．

**内積と成分**

$\vec{a}=(a_1,\ b_1)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ とするとき　$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$

また，内積の定義から次のことが成り立つ．

$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ がともに $\vec{0}$ でないとき，なす角 $\theta$ について

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{a_1b_1+a_2b_2}{\sqrt{a_1{}^2+a_2{}^2}\sqrt{b_1{}^2+b_2{}^2}}$$



©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

また，$\cos\theta=0$　つまり　$\vec{a}$ と $\vec{b}$ が垂直であるとき，$\vec{a}\perp\vec{b}$ と表し，以下が成り立つ.

$$\vec{a}\perp\vec{b} \iff \vec{a}\cdot\vec{b}=0 \iff a_1b_1+a_2b_2=0$$

⇒　C&U ２

### ［３］　内積の演算法則

ベクトルの内積について，次の法則が成り立つ.

$$\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2 \qquad \vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$$
$$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c} \qquad (m\vec{a})\cdot\vec{b}=m(\vec{a}\cdot\vec{b})=\vec{a}\cdot(m\vec{b})$$

各自，内積の定義，および成分表示されたベクトルを用いて証明してみよ.

⇒　C&U ３

【CHECK & UP】

**1**　2つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ の大きさ　がそれぞれ $|\vec{a}|=5$，$|\vec{b}|=3$ である．$\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角が次の(1)〜(4)のとき，$\vec{a}$，$\vec{b}$ の内積を求めよ．

(1)　60°　　(2)　90°　　(3)　135°　　(4)　180°

**2**　2つのベクトル　$\vec{a}=(2,\ 10)$，$\vec{b}=(9,\ 6)$ について，次の問いに答えよ．

(1)　内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ．　　(2)　$\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角を求めよ．

**3**　次の等式を証明せよ．

(1)　$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{c}+\vec{d})=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{a}\cdot\vec{d}+\vec{b}\cdot\vec{d}$

(2)　$|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$



©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞


ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第 40 講　平面ベクトル⑵

1　⑴　$|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=3$ で，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 $\theta$ が $\theta=60^\circ$ のとき，内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ．

⑵　1 辺の長さが 2 である正方形 ABCD において，次の内積を求めよ．

（i）$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$　（ii）$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$　（iii）$\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{DA}$　（iv）$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{DC}$



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >


ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 [1]　$p$ を正の数とし，ベクトル $\vec{a}=(1,\ 1)$ と $\vec{b}=(1,\ -p)$ があるとする．いま，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角が $60°$ であるとき，$p$ の値を求めよ．

[2]　ベクトル $\vec{a}=(1,\ -2)$ と垂直な単位ベクトルを求めよ．



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　ベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ について，$|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=1$，$|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{13}$ が成り立つとき，次の問いに答えよ．

(1)　内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$，および $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 $\theta$ を求めよ．

(2)　$\vec{a}-\vec{b}$ の大きさを求めよ．

(3)　$\vec{a}+t\vec{b}$ の大きさが最小になるように実数 $t$ の値を定め，その最小値を求めよ．



©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第 40 講　平面ベクトル(2)

(1)　ベクトル $\vec{a}=(\sqrt{3},\ 1)$，$\vec{b}=(-1,\ -\sqrt{3})$ において，$\vec{a}\cdot\vec{b}=-\boxed{\text{ア}}\sqrt{\boxed{\text{イ}}}$，

$|\vec{a}|=\boxed{\text{ウ}}$，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角は $\boxed{\text{エオカ}}^\circ$ である．

(2)　ベクトル $|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=1$ で，$\vec{a}-\vec{b}$ と $2\vec{a}+5\vec{b}$ が垂直であるとき，$\vec{a}\cdot\vec{b}=-\boxed{\text{キ}}$ である．

(3)　$|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=3$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=-3$ のとき，$|\vec{a}+t\vec{b}|$ を最小にする実数 $t$ の値は $t=\dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$ であり，そのときの最小値は $\sqrt{\boxed{\text{コ}}}$ である．



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第 40 講　平面ベクトル(2)

## 【CHECK & UP】

**1**

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos 60^\circ=5\cdot 3\cdot\frac{1}{2}=\mathbf{\frac{15}{2}}$

(2) $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos 90^\circ=5\cdot 3\cdot 0=\mathbf{0}$

(3) $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos 135^\circ=5\cdot 3\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\mathbf{-\frac{15}{\sqrt{2}}}$

(4) $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos 180^\circ=5\cdot 3\cdot(-1)=\mathbf{-15}$

内積は計算による定義が先行する概念である．まずはこの練習により定義を頭にたたき込もう．ちなみにベクトルの内積は「ベクトル」ではなく「スカラー」である．つまり内積は実数である．これによりベクトルの世界を他の分野の世界と結びつけることが可能となる．

**2**

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=2\times 9+10\times 6=\mathbf{78}$

(2) $\vec{a}$, $\vec{b}$ のなす角を $\theta$ とすると

$|\vec{a}|=\sqrt{4+100}=2\sqrt{26}$　$|\vec{b}|=\sqrt{81+36}=3\sqrt{13}$　より

$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{78}{2\sqrt{26}\cdot 3\sqrt{13}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$0^\circ\leqq\theta\leqq 180^\circ$ より　$\theta=\mathbf{45^\circ}$

内積は定義による計算に加え，成分表示されている場合には「公式」からも求められる．
この定義と公式を利用することにより，2 つのベクトルのなす角に関する問題を解くことができる．

**3**

(1) $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{c}+\vec{d})=(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}+(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{d}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{a}\cdot\vec{d}+\vec{b}\cdot\vec{d}$

(2) $|\vec{a}+\vec{b}|^2=(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})$

$=\vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{b}$

$=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

内積の演算法則により，文字式における分配法則や展開をするのと同じような感覚で内積を計算することができる．その感覚を用いる上での主な注意点は，内積を表す「・」は省略できないこと，また $(\vec{a})^2$ といった誤記も避けること，である．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

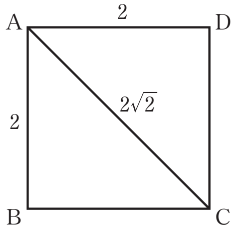
# 第40講　平面ベクトル(2)

**1** (1) $|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=3$ で，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 $\theta$ が $\theta=60^\circ$ のとき，内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ．

(2) 1辺の長さが2である正方形ABCDにおいて，次の内積を求めよ．

(i) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$　(ii) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$　(iii) $\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{DA}$　(iv) $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{DC}$

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos 60^\circ=2\times3\times\dfrac{1}{2}=\mathbf{3}$




(2) (i) $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ のなす角は　$45^\circ$

よって　$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos 45^\circ=2\times2\sqrt{2}\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\mathbf{4}$

(ii) $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{BC}$ のなす角は　$90^\circ$

よって　$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{BC}|\cos 90^\circ=\mathbf{0}$

(iii) $\overrightarrow{CB}$ と $\overrightarrow{DA}$ のなす角は　$0^\circ$

よって　$\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{DA}=|\overrightarrow{CB}||\overrightarrow{DA}|\cos 0^\circ=2\times2\times1=\mathbf{4}$

(iv) $\overrightarrow{CA}$ と $\overrightarrow{DC}$ のなす角は　$135^\circ$

よって　$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{DC}=|\overrightarrow{CA}||\overrightarrow{DC}|\cos 135^\circ=2\sqrt{2}\times2\times\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=\mathbf{-4}$

**2** [1]　$p$ を正の数とし，ベクトル $\vec{a}=(1,\ 1)$ と $\vec{b}=(1,\ -p)$ があるとする．いま，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角が $60^\circ$ であるとき，$p$ の値を求めよ．

$|\vec{a}|=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$　$|\vec{b}|=\sqrt{1+p^2}$　$\vec{a}\cdot\vec{b}=1\times1+1\times(-p)=1-p$

これらと　$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos 60^\circ$　より　$1-p=\sqrt{2}\sqrt{1+p^2}\times\dfrac{1}{2}$

(右辺)$>0$ より　(左辺)$>0$　よって　$1-p>0$ より　$p<1$　したがって　$0<p<1$

このとき両辺を2乗して　$(1-p)^2=2(1+p^2)\times\dfrac{1}{4}$　$p^2-4p+1=0$　$p=2\pm\sqrt{3}$

$0<p<1$ より　$p=\mathbf{2-\sqrt{3}}$

**2** [2]　ベクトル $\vec{a}=(1,\ -2)$ と垂直な単位ベクトルを求めよ．

求めるベクトルを　$\vec{n}=(x,\ y)$ とおく．

$\vec{a}\perp\vec{n}$　より　$\vec{a}\cdot\vec{n}=0$　つまり　$x-2y=0$　……①

また，$|\vec{n}|=1$ より　$x^2+y^2=1^2$　……②

①より　$x=2y$　これを②に代入して　$4y^2+y^2=1$　$y^2=\dfrac{1}{5}$　よって　$y=\pm\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

したがって求めるベクトルは $\vec{n}=\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}},\ \dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)$，$\left(-\dfrac{2}{\sqrt{5}},\ -\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　ベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ について，$|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=1$，$|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{13}$ が成り立つとき，次の問いに答えよ．

(1)　内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$，および $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 $\theta$ を求めよ．

(2)　$\vec{a}-\vec{b}$ の大きさを求めよ．

(3)　$\vec{a}+t\vec{b}$ の大きさが最小になるように実数 $t$ の値を定め，その最小値を求めよ．

(1)　$|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{13}$　より　$|\vec{a}+\vec{b}|^2=13$

$|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=13$　　よって　$9+2\vec{a}\cdot\vec{b}+1=13$　より　$\vec{a}\cdot\vec{b}=\boldsymbol{\frac{3}{2}}$

$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{\frac{3}{2}}{3\times1}=\dfrac{1}{2}$　　$0°\leqq\theta\leqq180°$ より　$\theta=\boldsymbol{60°}$

(2)　$|\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=9-3+1=7$　よって　$|\vec{a}-\vec{b}|=\boldsymbol{\sqrt{7}}$

(3)　$|\vec{a}+t\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+2t\vec{a}\cdot\vec{b}+t^2|\vec{b}|^2=t^2+3t+9=\left(t+\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{27}{4}$

よって $t=-\dfrac{3}{2}$ のとき　$|\vec{a}+t\vec{b}|^2$ は最小値 $\dfrac{27}{4}$ をとる．

$|\vec{a}+t\vec{b}|\geqq0$　より　このとき $|\vec{a}+t\vec{b}|$ も最小となる．

したがって　$|\vec{a}+t\vec{b}|$ は $t=\boldsymbol{-\frac{3}{2}}$ のとき最小値 $\boldsymbol{\frac{3\sqrt{3}}{2}}$ をとる．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第 40 講　平面ベクトル(2)

(1)　ベクトル $\vec{a}=(\sqrt{3},\ 1)$，$\vec{b}=(-1,\ -\sqrt{3})$ において，$\vec{a}\cdot\vec{b}=-$ **ア** $\sqrt{\textbf{イ}}$，

$|\vec{a}|=$ **ウ**，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角は **エオカ**°　である．

(2)　ベクトル $|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=1$ で，$\vec{a}-\vec{b}$ と $2\vec{a}+5\vec{b}$ が垂直であるとき，$\vec{a}\cdot\vec{b}=-$ **キ** である．

(3)　$|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=3$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=-3$ のとき，$|\vec{a}+t\vec{b}|$ を最小にする実数 $t$ の値は $t=\dfrac{\textbf{ク}}{\textbf{ケ}}$

であり，そのときの最小値は $\sqrt{\textbf{コ}}$ である．

(1)　$\vec{a}\cdot\vec{b}=\sqrt{3}\times(-1)+1\times(-\sqrt{3})=-\mathbf{2}\sqrt{\mathbf{3}}$

$|\vec{a}|=\sqrt{3+1}=\mathbf{2}$　　$|\vec{b}|=\sqrt{1+3}=2$

よって $\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角を $\theta$ とすると　$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{-2\sqrt{3}}{2\times2}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　$\theta=\mathbf{150}°$

(2)　$\vec{a}-\vec{b}$ と $2\vec{a}+5\vec{b}$ が垂直であることより

$(\vec{a}-\vec{b})\cdot(2\vec{a}+5\vec{b})=0$　　$2|\vec{a}|^2+3\vec{a}\cdot\vec{b}-5|\vec{b}|^2=0$

$|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=1$ より　$8+3\vec{a}\cdot\vec{b}-5=0$　　よって　$\vec{a}\cdot\vec{b}=-\mathbf{1}$

(3)　$|\vec{a}+t\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+2t\vec{a}\cdot\vec{b}+t^2|\vec{b}|^2$

$=9t^2-6t+4=9\left(t-\dfrac{1}{3}\right)^2+3$

よって　$t=\dfrac{1}{3}$ のとき　$|\vec{a}+t\vec{b}|^2$ は最小値 3 をとる．

$|\vec{a}+t\vec{b}|\geqq0$ より　$|\vec{a}+t\vec{b}|^2$ が最小のとき　$|\vec{a}+t\vec{b}|$ も最小

したがって　$t=\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}$ のとき最小値 $\sqrt{\mathbf{3}}$ をとる．

ⓒRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。